Quantum Fysica 2

Olaf Scholten
Kernfysisch Versneller Instituut
NL-9747 AA Groningen

Tentamen, Woensdag 16 Augustus, 2000
5 opgaven, iedere uitwerking op een apart vel papier met naam en studienummer
Maak gebruik van de bijgevoegde formulelijst waar dat nodig lijkt.

Opgave 1

Het elektron in een atoom zit in een genormeerde toestand

$$\Psi = R_{21}\Big(\sqrt{\frac{2}{3}}Y_{1,-1}\chi_+ + \sqrt{\frac{1}{3}}Y_{1,0}\chi_-\Big) \tag{1}$$

waar spin- en positiecoördinaten gecombineerd zijn.
De notatie $Y_{l,m}$ is gebruikt i.p.v. Y_l^m.

a. Als het kwadraat van het baanimpulsmoment, L^2, gemeten wordt, welke waarden kun je dan verwachten en met welke waarschijnlijkheden?

b. idem, maar dan voor de z-projectie van het baanimpulsmoment, L_z.

c. idem, maar dan voor de z-projectie van de elektronenspin, S_z.

d. idem, maar dan voor de z-projectie van het totale baanimpulsmoment, $J_z = L_z + S_z$.

e. Wat zijn de mogelijke waarden van J^2 voor deze toestand? Bereken ook de waarschijnlijkheden gebruikmakend van formule 24 en 25 van het formuleblad.

f. Bereken $\Phi = J_-\Psi$ waarbij $J_- = L_- + S_-$.

g. Bereken $< \Phi|\Phi >$ waarbij Φ in het vorige onderdeel is berekend. Wat concludeer je hieruit voor de waarschijnlijkheden om verschillende waarden van J^2 te meten?

h. Als de positie van het elektron wordt gemeten, wat is dan de kansdichtheid om het elektron op (r, θ, ϕ) aan te treffen?

i. In een meting worden zowel r, de afstand tot de oorsprong, als m_s, de z-projectie van de elektronenspin, gemeten. Geef de kansdichtheid om het elektron met $m_s = +1/2$ te meten op een afstand r.

Opgave 2

Beschouw 3 deeltjes in een 1 dimensionele Harmonische-oscillator potentiaal. De 3 deeltjes zijn in thermisch evenwicht met een totale energie van $(11/2)\hbar\omega$.

a. Beantwoord voor het geval van 3 NIET identieke deeltjes met gelijke massa de volgende vragen.

   (a) Stel de energie van één willekeurig deeltje wordt gemeten. Wat zijn de mogelijke meetwaarden?

(b) Wat zijn de kansen voor de verschillende meetwaarden?

(c) Wat is de meest waarschijnlijke energieverdeling tussen de 3 deeltjes?

(d) Wat is de gemiddelde energie van een deeltje?

b. Beantwoord bovenstaande vragen voor het geval van 3 identieke fermionen. Neem aan dat alle spins in de zelfde richting staan b.v. onderinvloed van een sterk extern magneetveld (negeer spin dus).

Opgave 3

Het magnetisch moment ($\vec{\mu}$) van een elektron is evenredig met zijn spin, $\vec{\mu} = g\,\vec{S}$. Dit elektron is geplaatst in een magnetisch veld $\vec{B}$. Aannemende dat het elektron in rust is, is $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

a. Druk, voor een algemene richting van het magneetveld, H uit als 2×2 matrix, (gebruik de Pauli-spinmatrices, vergel. 2 formuleblad).

b. Stel $\vec{B} = B_0\,\hat{z}$ en bepaal de eigentoestanden $\chi_\pm$ van H en de bijbehorende energieën $E_\pm$.

c. Geef de oplossing $\chi(t)$ van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking (voor $\vec{B} = B_0\,\hat{z}$) waarbij op tijdstip $t = 0$ er een gelijke kans is het elektron in de toestanden χ_+ en χ_- aan te treffen.

d. Bereken de tijdsafhankelijkheid van zowel $< S_z >$ als $< S_x >$ voor dit probleem.

Opgave 4

a. Geef de tijds-onafhankelijke Schrödinger vergelijking voor het probleem van de oneindige put in twee dimensies,

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als x,y allen tussen 0 en a;} \\ \infty & \text{andere gevallen} \end{cases} .$$

Specificeer ook de randvoorwaarden.

b. Gebruik scheiding van variabelen om dit probleem op te lossen, geef dus de algemene uitdrukking voor de energieën en golffuncties.

c. Hoeveelvoudig zijn de grondtoestand en de eerste aangeslagentoestand gedegenereerd?

d. We voegen nu de volgende storing H' toe aan de Hamiltoniaan,

$$H' = \begin{cases} V_0, & \text{als } 0 < \text{x} < \text{a}/4 \text{ en } 0 < \text{y} < \text{a}/4 \\ 2V_0, & \text{if a/4¡x¡a/2 en a/4¡y¡a/2} \\ 0, & \text{andere gevallen} \end{cases}$$

Geef de eersteordestoringstheoriecorrectie tot de grondtoestandsenergie.

e. Geef de eersteordecorrectie tot de energie van de eerste aangeslagen toestand.

Opgave 5

In dit probleem moet een benaderde oplossing van

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x - x_0) \quad x_0 > 0$$

worden geconstrueerd met behulp van het variatieprincipe. Gebruik de parabolische functie

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ax(x-a) & \text{als } 0 < \text{x} < \text{a} \\ 0 & \text{andere gevallen} \end{cases}$$

waar A door normalisatie wordt bepaald en a een variatieparameter is.

a. Bepaal de normeringsconstante A.

b. Geef, gebruik makend het variatieprincipe, de beste benadering tot de grondtoestandsenergie. Geef gebruik makend van deze trial golffunctie een afschatting voor de grondtoestandsenergie.

c. Construeer de exacte oplossing voor de grondtoestand.

= =

Bij de bovenstaande opgaven kunnen de volgende formules nuttig zijn.

= =

Sigma (spin) matrices.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\sigma_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{3}$$

Harmonic oscillator wave functions.

Solutions for a harmonic oscillator potential $V(x) = \frac{\omega^2 m}{2}x^2$

$$u_n = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(y) e^{-y^2/2} \tag{4}$$

with $y = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x$, where the Hermiet polynomials for $n \leq 4$ are given as

$$H_0(y) = 1 \tag{5}$$

$$H_1(y) = 2y \tag{6}$$

$$H_2(y) = 4y^2 - 2 \tag{7}$$

$$H_3(y) = 8y^2 - 12y \tag{8}$$

$$H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12 \tag{9}$$

Matrix elements:

$$< n|x^2|n > \;=\; < n|p^2|n > /(m\omega)^2 = (2n+1)\,\frac{\hbar}{2m\omega} \tag{10}$$

$$< n|x^2|n-2 > \;=\; -< n|p^2|n-2 > /(m\omega)^2 = \sqrt{n(n-1)}\,\frac{\hbar}{2m\omega} \tag{11}$$

$$< n|x^3|n-1 > \;=\; 3\,n^{3/2}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} \tag{12}$$

$$< n|x^3|n-3 > \;=\; \sqrt{n(n-1)(n-2)}\,\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} \tag{13}$$

$$< n|x^4|n > \;=\; [2(n+1)(n+2)+(2n-1)(2n+1)]\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{2} \tag{14}$$

$$< n|x^4|n-2 > \;=\; 2(2n-1)\sqrt{n(n-1)}\,\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{2} \tag{15}$$

$$< n|x^4|n-4 > \;=\; \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\,\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{2} \tag{16}$$

Hydrogen wave functions.

$R_{nl}(r)$ are hydrogen-like wave functions with $a_0 = \frac{\hbar}{\mu c\alpha}$ and $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$.

$$R_{10}(r) \;=\; 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}\;, \tag{17}$$

$$R_{20}(r) \;=\; 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}\;, \tag{18}$$

$$R_{21}(r) \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}\,e^{-Zr/2a_0}\;. \tag{19}$$

Spherical harmonics $Y_{l,m}$.

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\;;Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,e^{i\phi}\sin\theta\;;Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\;, \tag{20}$$

with $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}$, and the normalization condition:

$$\int d\Omega\, Y^*_{l,m}(\Omega) Y_{l',m'}(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^*_{l,m}(\Omega) Y_{l',m'}(\Omega) = \delta_{l,l'}\,\delta_{m,m'}\;. \tag{21}$$

$$L_+ = L_x + iL_y \quad \text{and} \quad L_+\,Y_{lm} = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\;Y_{l,m+1}\;, \tag{22}$$

$$L_- = L_x - iL_y \quad \text{and} \quad L_-\,Y_{lm} = \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\;Y_{l,m-1}\;. \tag{23}$$

In addition:

$$|l,j,m_j> \;=\; \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}|Y_{l,m}\chi_+> + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}|Y_{l,m+1}\chi_-> \quad \text{for } j = l+1/2 \tag{24}$$

$$|l,j,m_j> \;=\; \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}|Y_{l,m}\chi_+> - \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}|Y_{l,m+1}\chi_-> \quad \text{for } j = l-1/2 \tag{25}$$

with $m = m_j - 1/2$.

Integralen.

Alle benodigde integralen zijn af te leiden uit:

$$\int_{-a}^{a} e^{i\alpha x}\,dx = \frac{2}{\alpha}\sin(\alpha a)\,, \tag{26}$$

$$\int_{-a}^{a} \cos\alpha x\, e^{ikx}\,dx = \left[\frac{\sin(\alpha+k)a}{\alpha+k} + \frac{\sin(\alpha-k)a}{\alpha-k}\right], \tag{27}$$

$$\int_{-a}^{a} \sin\alpha x\, e^{ikx}\,dx = i\left[\frac{\sin(\alpha+k)a}{\alpha+k} - \frac{\sin(\alpha-k)a}{\alpha-k}\right], \tag{28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\,dx = 2\pi\,\delta(k-k')\,, \tag{29}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p')\,\delta(p-p')\,dp' = f(p) \quad (\text{mits } f(p) \text{ differentieerbaar in } p)\,, \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b+ic)^2}dx = \sqrt{\pi/a}\,, \tag{31}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a(x+b)^2}dx = (b^2+1/2a)\sqrt{\pi/a}\,, \tag{32}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}e^{ikx}dx = \sqrt{\pi/a}\,e^{-ikb-k^2/4a}\,, \tag{33}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)\,dx = \sqrt{\pi/a}\;e^{-b^2/4a}\,, \tag{34}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx = \tfrac{1}{2}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{(2a)^n}\sqrt{\pi/a} \text{ voor } n\geq 0\,, \tag{35}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{voor} \quad n=0\,, \tag{36}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}dx = \frac{n!}{2\,a^{n+1}} \quad \text{met} \quad a>0\,, \tag{37}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{n}e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{met} \quad a>0\,, \tag{38}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(px)}{x^2}dx = \tfrac{1}{2}\pi p\,, \tag{39}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,e^{ikx}dx = \frac{\pi}{a}e^{-a|k|}\,, \text{ ook geldig voor k=0 }\,, \tag{40}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{\pi}{2\,a^3}\,, \tag{41}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\,\frac{\pi}{a^{2n-1}} \text{ voor } n\geq 2, \tag{42}$$

$$\int_{-a}^{a} x^2\,\sin^2 n\pi x/a\,dx = \frac{a^3}{2}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{(n\pi)^2}\right], \tag{43}$$

$$\int_{-a}^{a} x^2\,\cos^2(n-\frac{1}{2})\pi x/a\,dx = \frac{a^3}{2}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{((n-\frac{1}{2})\pi)^2}\right], \tag{44}$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,. \tag{45}$$

Geef in de oplossingen aan welke formules je hebt gebruikt.